OSSERVATORI DELLO STATO

$$(\Sigma)\quad \begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

$x(t_0)$ non è noto!

copia di Σ

$$(\Sigma_0)\quad \begin{cases}\dot{\xi} = A\xi + Bu \\ \hat{y} = C\xi\end{cases}$$

$\xi(t_0) \neq x(t_0)$

errore di stima

$$e = x - \xi \;\Rightarrow\; e(t_0) = x(t_0) - \xi(t_0) \neq 0$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = (Ax + \cancel{Bu}) - (A\xi + \cancel{Bu}) = A(x-\xi) = Ae$$

osservatore (ad anello chiuso) di Luenberger

$$(\Sigma_0)\quad \begin{cases}\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - \overset{C\xi}{\cancel{\hat{y}}}) \\ \hat{y} = C\xi\end{cases}$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = Ax + \cancel{Bu} - (A\xi + \cancel{Bu} + GC(x-\xi)) = (A-GC)(x-\xi) = (A-GC)e$$

$$e(t) = \exp[(A-GC)(t-t_0)]\,e(t_0) \to 0 \;?$$

per $t \to \infty$

$$\dot{e} = (A - GC)\, e$$

$$\sigma\{A - GC\} = \sigma\{(A-GC)^T\}$$

$$= \sigma\{A^T + C^T(-G)^T\}$$

per analogia "$A + Bk$"

osservabilità degli autovalori di $A - GC$ sse (A^T, C^T) è raggiungibile

$$n = \rho\left[C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T\right] =$$

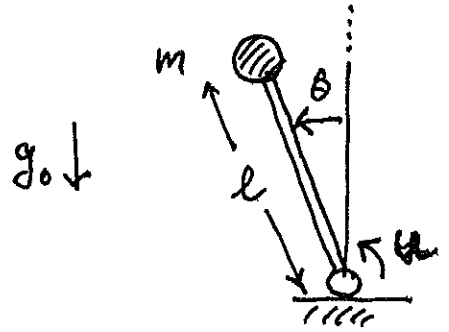
$$= \rho\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \iff \text{osservabilità della coppia } (A, C)$$

$\Rightarrow G = -K^T$ (dove K assegna gli autovalori alla coppia (A^T, C^T) $\Rightarrow$ formula di Ackermann)

<u>Rilevabilità</u>

$$\rho\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}\Bigg|_{\forall \lambda = \lambda_i \,:\, Re[\lambda_i] \geq 0} = n \quad \text{allora } \underline{\text{ok}}!$$

Osservatore (pendolo inverso)



massa concentrata in punta

bilancio delle coppie

$$ml^2 \cdot \ddot{\theta} - m g_0 l \sin\theta = u$$

Linearizzazione attorno a $\theta = 0$ (punto di equilibrio instabile ad anello aperto) : $\sin\theta \simeq \theta$

$$ml^2 \ddot{\theta} - m g_0 l \theta = u$$

equazioni di stato $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{m g_0 l}{ml^2} x_1 + \frac{1}{ml^2} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g_0}{l} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u$$

$$= Ax + bu$$

osserviamo solo la posizione θ : $\quad y = \theta = x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$

$$= Cx$$

Possiamo ricostruire l'intero stato con un osservatore di Luenberger ?

matrice di osservabilità $\quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(\mathcal{O}) = 2 = n$

SI !

Osservatore :
$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi)$$
$$= (A - GC)\xi + Bu + Gy \qquad \xi \in \mathbb{R}^2$$

Scegliamo di collocare gli autovalori della A - GC (nel semipiano a parte reale negativa) nelle radici dell'equazione

$$p^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \qquad (\alpha_1, \alpha_0 > 0)$$

Ad esempio in $\lambda_1 = -10 + j$, $\lambda_2 = -10 - j$

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = (\lambda + 10 - j)(\lambda + 10 + j) = \lambda^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_1}}{20} \lambda + \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_0}}{101}$$

i) metodo diretto (la matrice dinamica è 2x2, quindi semplice)

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad : \quad A - GC = \begin{bmatrix} -G_1 & 1 \\ \frac{g_0}{\ell} - G_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - (A - GC)] = \det \begin{bmatrix} \lambda + G_1 & -1 \\ G_2 - \frac{g_0}{\ell} & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + G_1 \lambda + \left(G_2 - \frac{g_0}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad G_1 = \alpha_1 \qquad G_2 = \alpha_0 + \frac{g_0}{\ell}$$

ii) metodo per dualità

$$\sigma(A - GC) = \sigma\left(A^T + C^T(-G^T)\right) = \sigma(A^T + C^T K)$$

con $K = -G^T$ e uso la formula di Ackerman per assegnare con K gli autovalori (utilizzando la coppia (A^T, C^T))

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & g_0/\ell \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \left[C^T \quad A^T C^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 1} \end{bmatrix} \leftarrow g$$

$$K = -g\, p^*(A^T)$$

$$p^*(A^T) = (A^T)^2 + \alpha_1 (A^T) + \alpha_0 I$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{g_0}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{g_0}{\ell} \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & g_0/\ell \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{g_0}{\ell} + \alpha_0 & \alpha_1 \frac{g_0}{\ell} \\ \alpha_1 & \frac{g_0}{\ell} + \alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$K = -g\, p^*(A^T) = -\left(\alpha_1 \quad \frac{g_0}{\ell} + \alpha_0 \right)$$

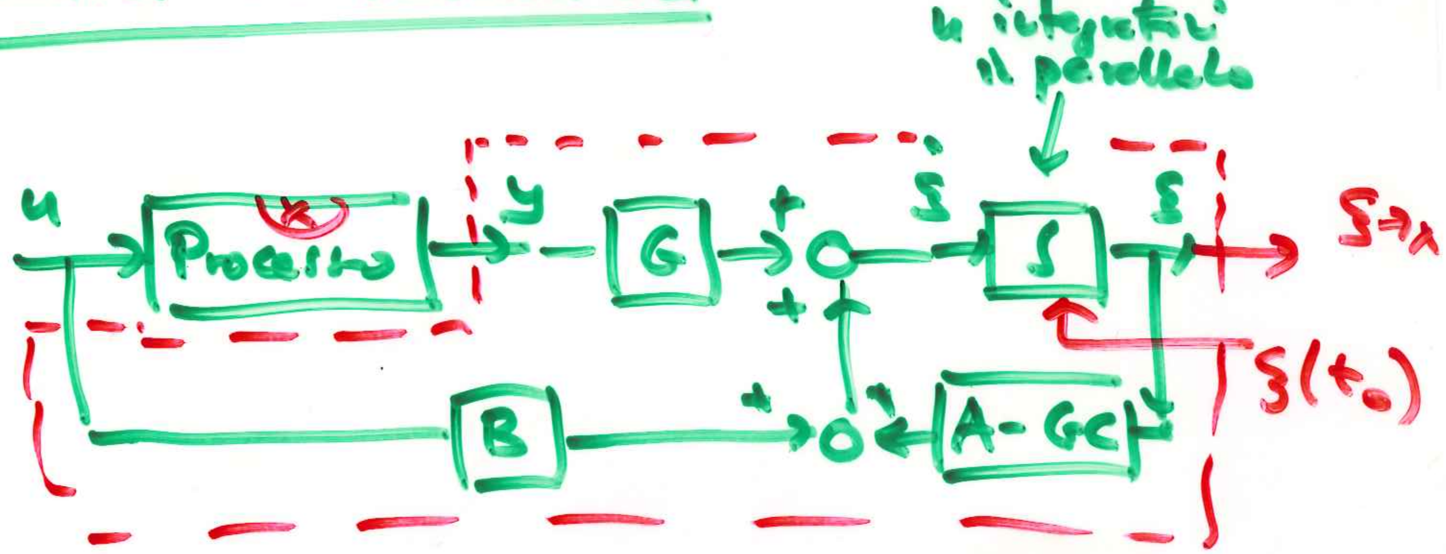
e infine

$$G = -K^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 + \frac{g_0}{\ell} \end{pmatrix}$$

ovviamente, lo stesso risultato del metodo precedente

$\triangleleft$

struttura dell'osservatore



dim ξ = dim x = n

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi)$$

$\hat{y}$ dell'osservatore

sist. dinamico di dimensione n = dim. stato processo

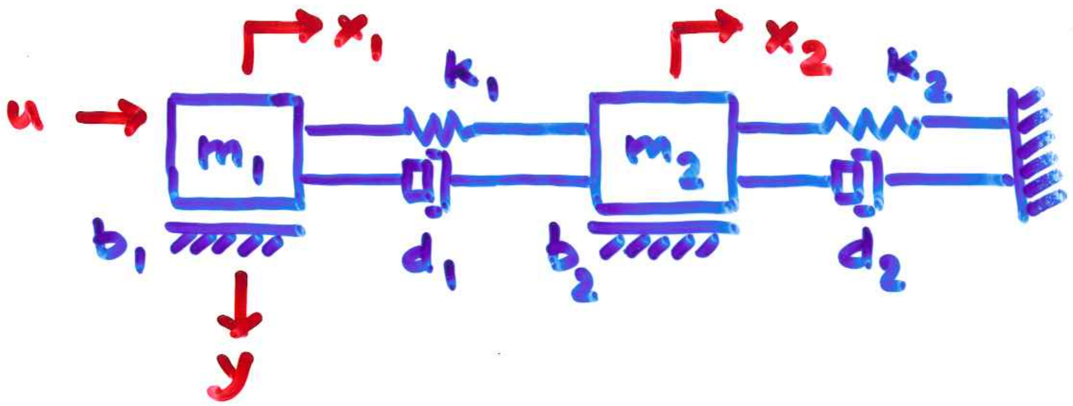
↓ in realtà

ho a disposizione $y = Cx$ ↕ p uscite (lin. indip.)

misure

È possibile costruire un osservatore di dimensione ridotta pari a $n-p$

Esempio



Schematizzazione del controllo di posizione di un utensile in una macchina a controllo numerico

$m_1 + m_2$ = massa utensile movimentato

k_1 = rigidezza strutturale utensile (ideale $\to \infty$)

d_1 = smorzamento " "

k_2 = rigidezza ambiente in contatto

d_2 = smorzamento " "

b_1, b_2 = attrito viscoso nel movimento

Si movimenta l'utensile con la forza u, si può misurare solo la posizione $y = x_1$ a monte della deformazione

- Si desidera "ricostruire" la posizione effettiva (e la velocità) della punta dell'utensile x_2 ($\dot{x}_2$)

```
% Esempio di osservatore dello stato con simulazione
%
% il processo e' un sistema di due masse in moto
% con attrito, collegate da molla e smorzatore,
% con l'uscita sulla massa dove agisce il controllo
% e con l'altra massa ancorata con molla e smorzatore
% ad un riferimento fisso
%
% Da utilizzare come file dati e elaborazione per i
% programmi Simulink
%
% OssOpenLoop_ModIO, OssLuenberg_ModIO, OssLuenberg_ModS
%
% Generato da A. De Luca
% 24 Maggio 1993

% dati processo

m1=1;
m2=1;
k1=100;
k2=100;
d1=1;
d2=1;
b1=1;
b2=1;
```

masse, rigidezze, smorzamenti, attriti

```
% matrici del processo

n=4;
A=[    0          0           1            0;
       0          0           0            1;
   -k1/m1       k1/m1   -(b1+d1)/m1      d1/m1;
    k1/m2  -(k1+k2)/m2     d1/m2    -(b2+d1+d2)/m2];
B=[0 0 1/m1 0]';
C=[1 0  0  0];
autovalA=eig(A);

% stato iniziale vero del processo

x0=[0.1 0.1 -2 2]';

% stato iniziale stimato dell'osservatore

xs0=[0.1 0 0 0]';
```

N.B. $\hat{x}_1 = y = x_1$ perchè lo misuro direttamente!

```
% localizzazione poli dell'osservatore

lambda=-10;        % provato anche con -5
P=[lambda lambda lambda lambda]';
```

4 poli coincidenti

```
% test osservabilita'

OB=obsv(A,C);
rgOB=rank(OB);

if rgOB<n
  disp(' Sistema non completamente osservabile! ');
else
  K=acker(A',C',P);
  L=K';
end;
```

assegnazione "duale"

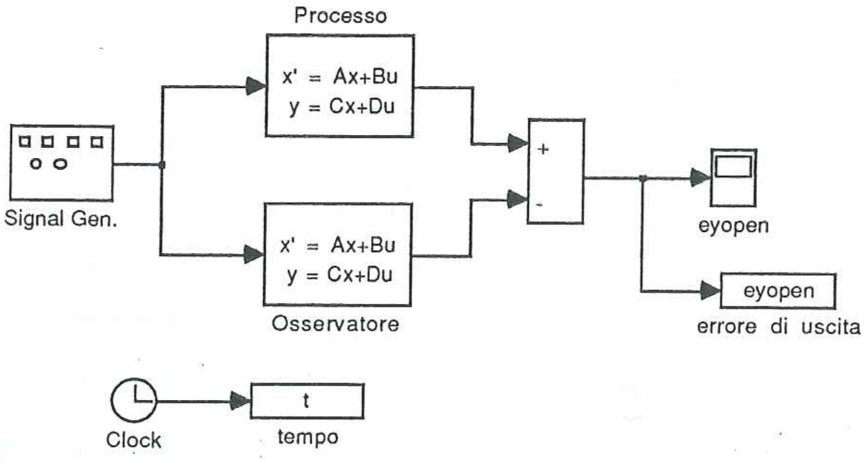
```
% verifica assegnazione

Aobs=A'-C'*L';
Pobs=eig(Aobs);
```

check numerico

```
% end
```

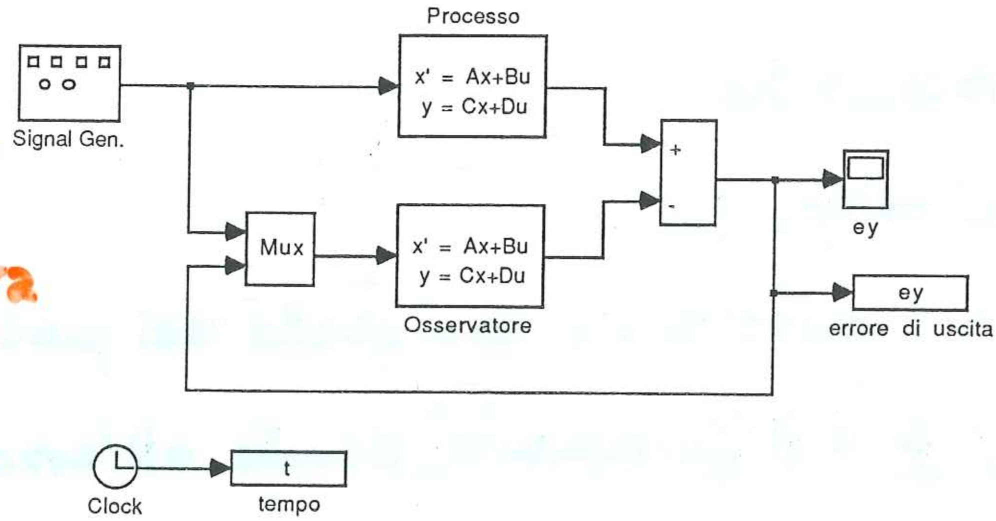
Osservatore ad ANELLO APERTO

onda quadra



Osservatore ad ANELLO CHIUSO (di Luenberger)

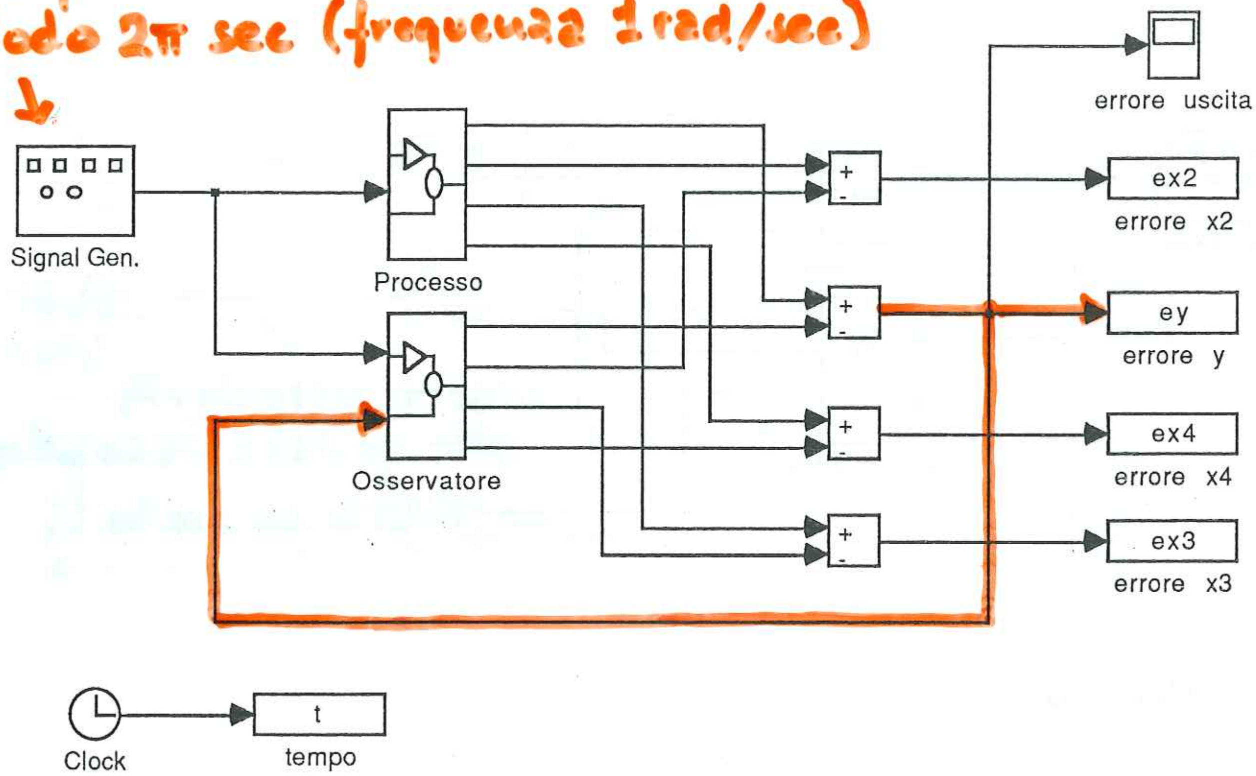
onda quadra



simulazioni effettuate con RK23, $t_{samp} = 0.01$

Osservatore ad ANELLO CHIUSO

onda quadra unitaria
periodo 2π sec (frequenza 1 rad/sec)

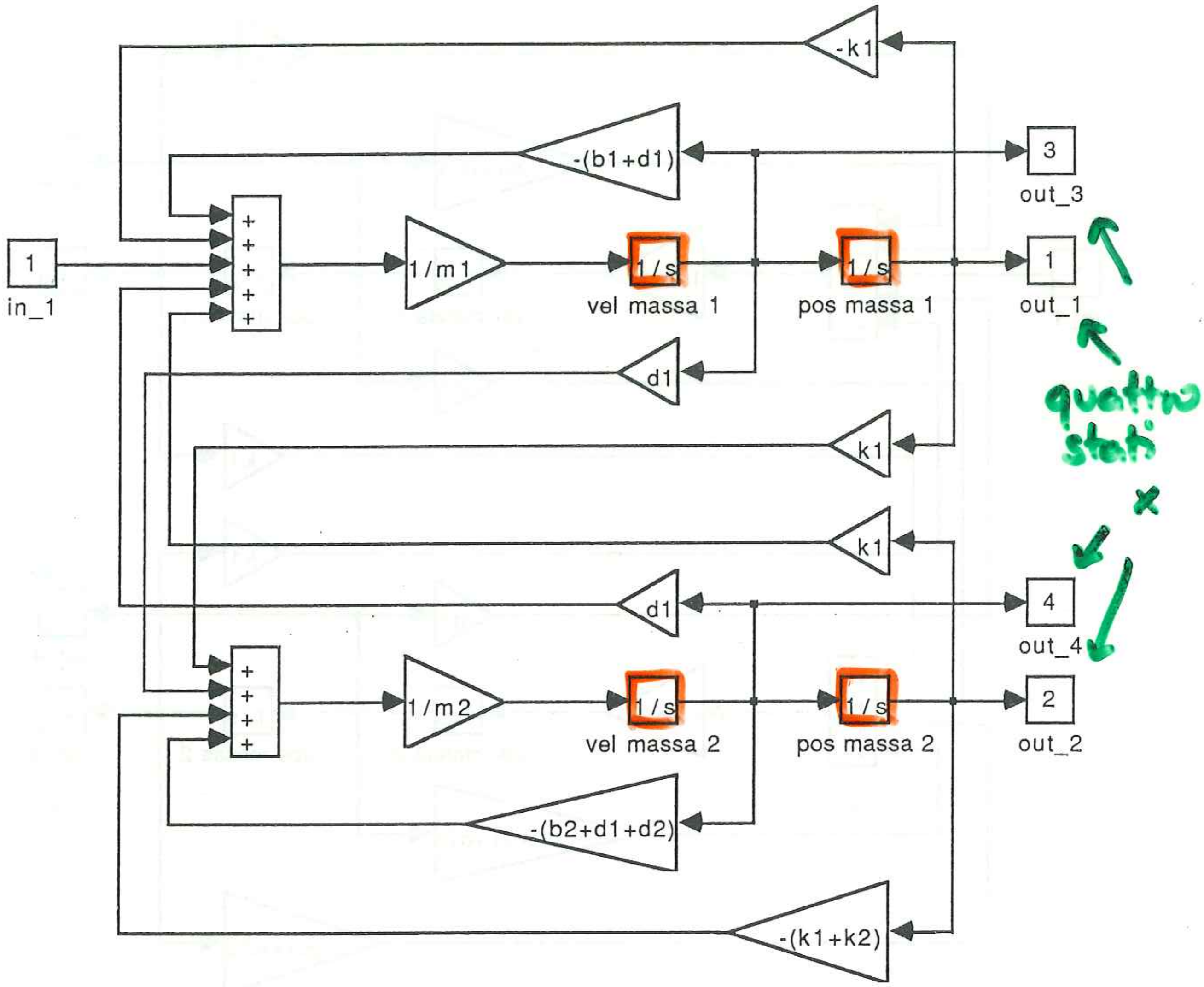


realizzazione "interna"

N.B. Il processo ha 1 solo ingresso

L'osservatore ha 2 ingressi

- 1 coincidente con quello del processo
- 1 è il "forzamento" dovuto all'errore in uscita $y - \hat{y}$



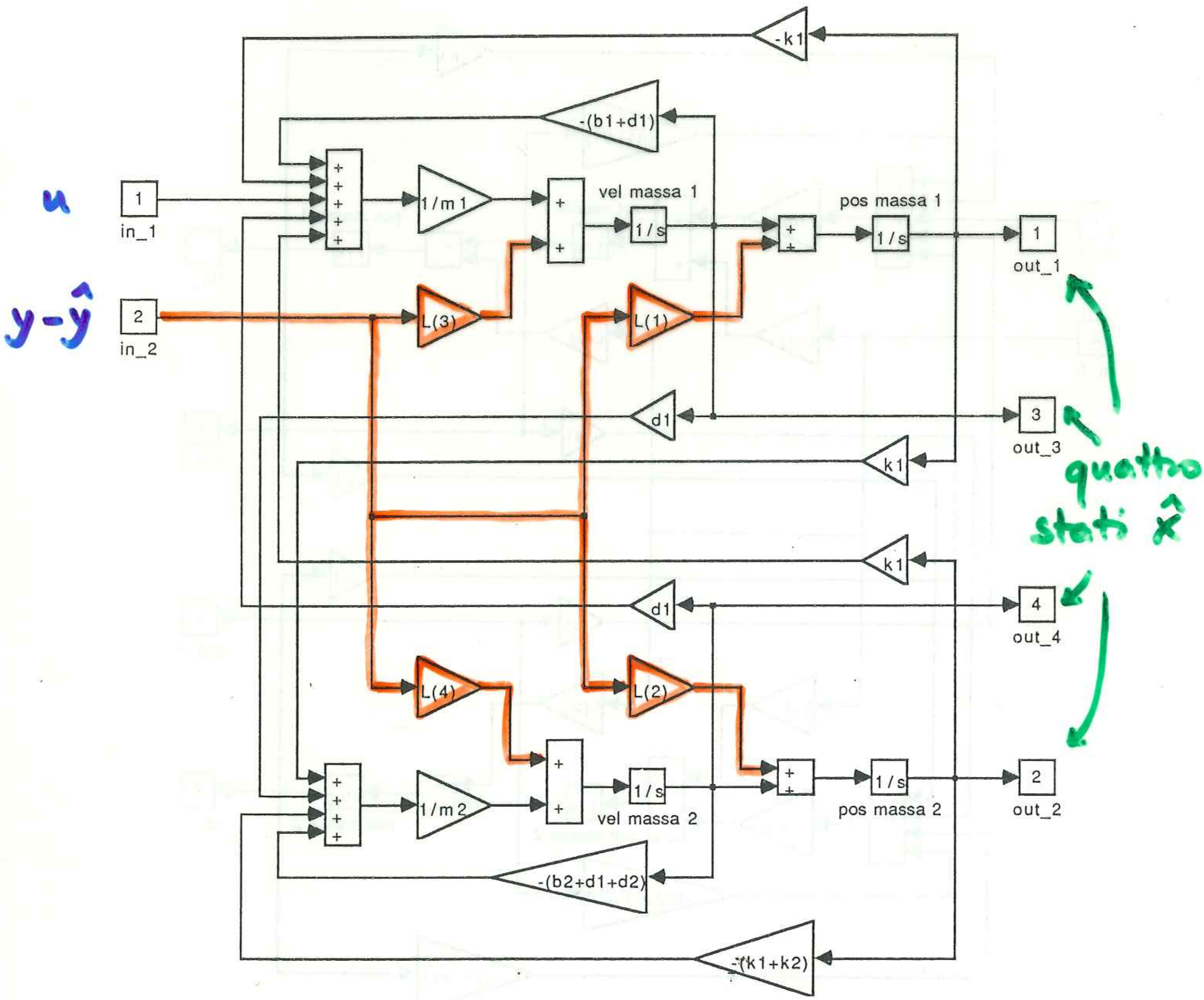
Schema a blocchi del $\boxed{\text{processo}}$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in \mathbb{R}^4$$

$$y = \underbrace{Cx}_{= x_1} \qquad u, y \in \mathbb{R}$$

N.B. Con i dati numerici, autovalori processo in

$$\sigma(A) = \{-1.809 \pm j16.079, -0.691 \pm j6.142\}$$



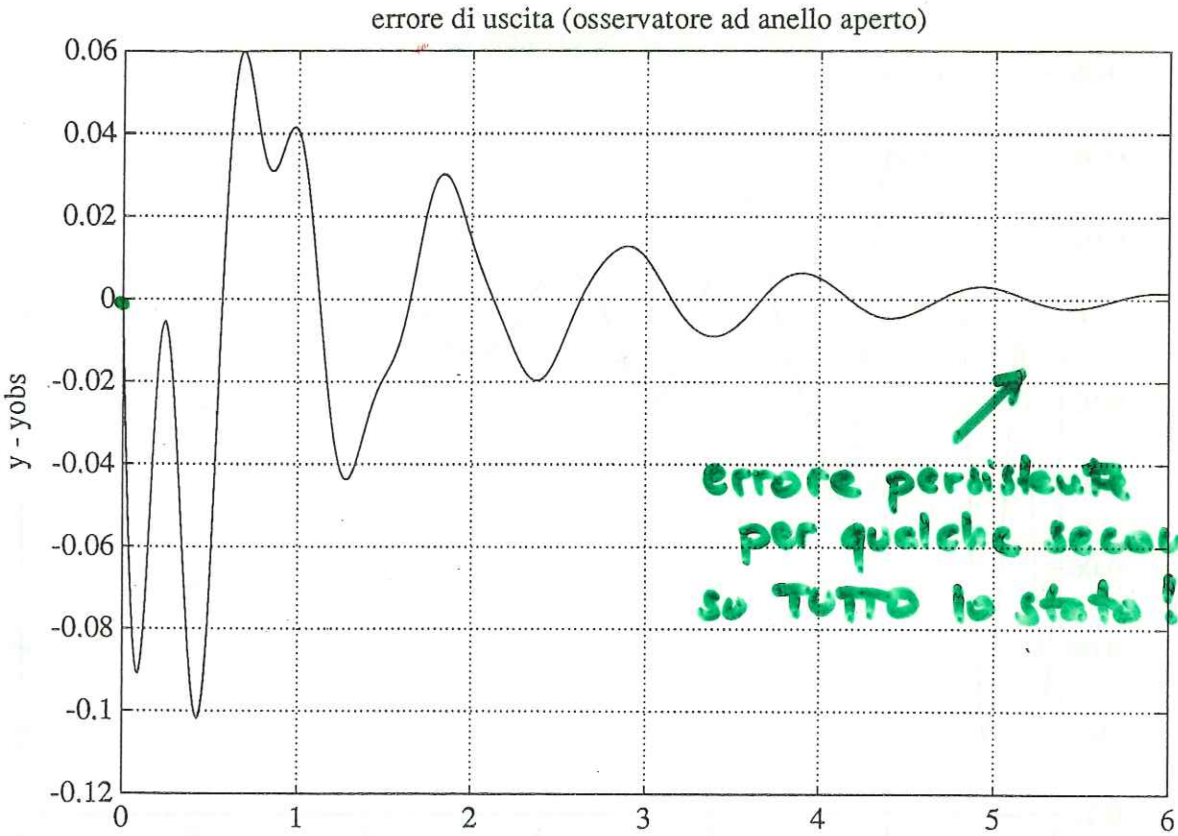
Schema a blocchi $\boxed{\text{dell'osservatore}}$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y-\hat{y}) \qquad \hat{x}\in\mathbb{R}^4$$

$$\hat{y} = \underbrace{C\hat{x}}_{=\hat{x}_1} \qquad u,y,\hat{y}\in\mathbb{R}$$

N.B. L proviene dalla scelta dei poli per l'osservatore

ad anello aperto



errore persistente per qualche secondo su TUTTO lo stato !!

6 sec

$$x(0) = [\underbrace{0.1 \quad 0.1}_{cm} \quad \underbrace{-2 \quad 2}_{cm/sec}]$$

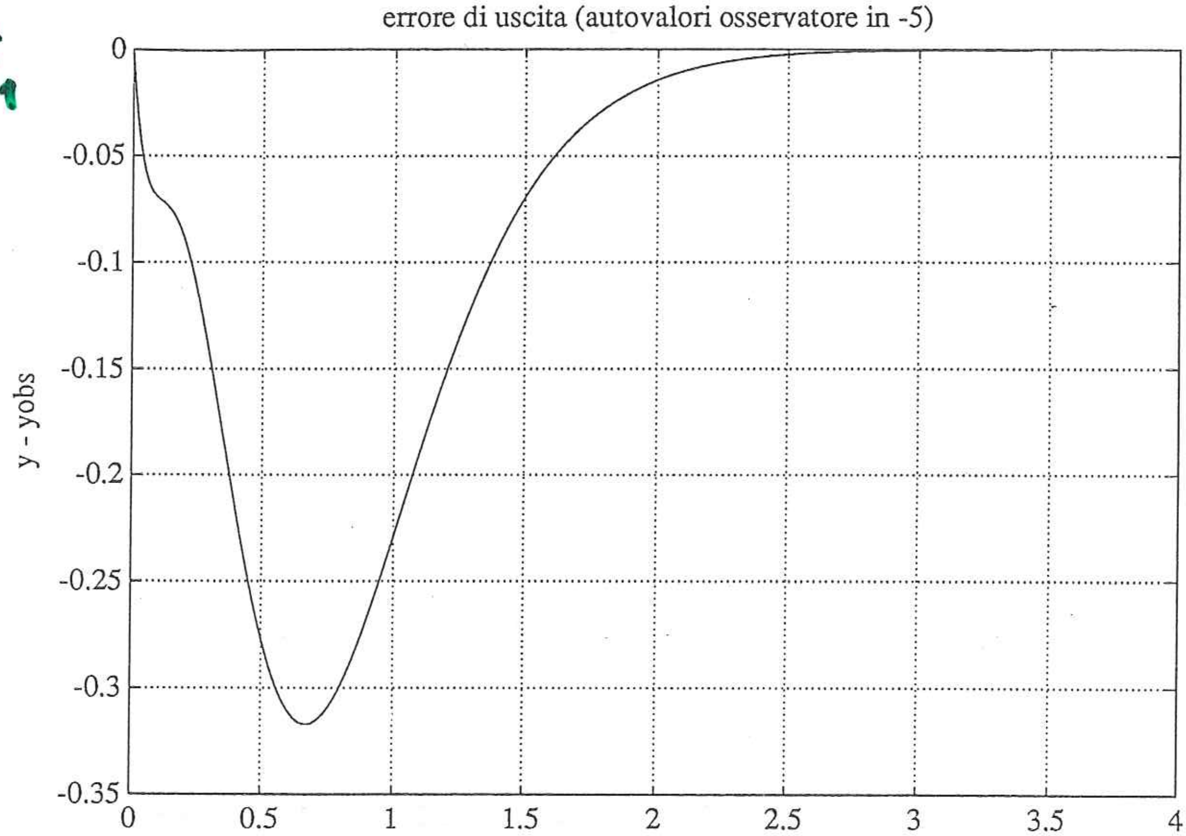
$$\hat{x}(0) = [0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

N.B. L'errore di uscita parte da zero perchè

$$x_1(0) = y(0) = \hat{x}_1(0)$$

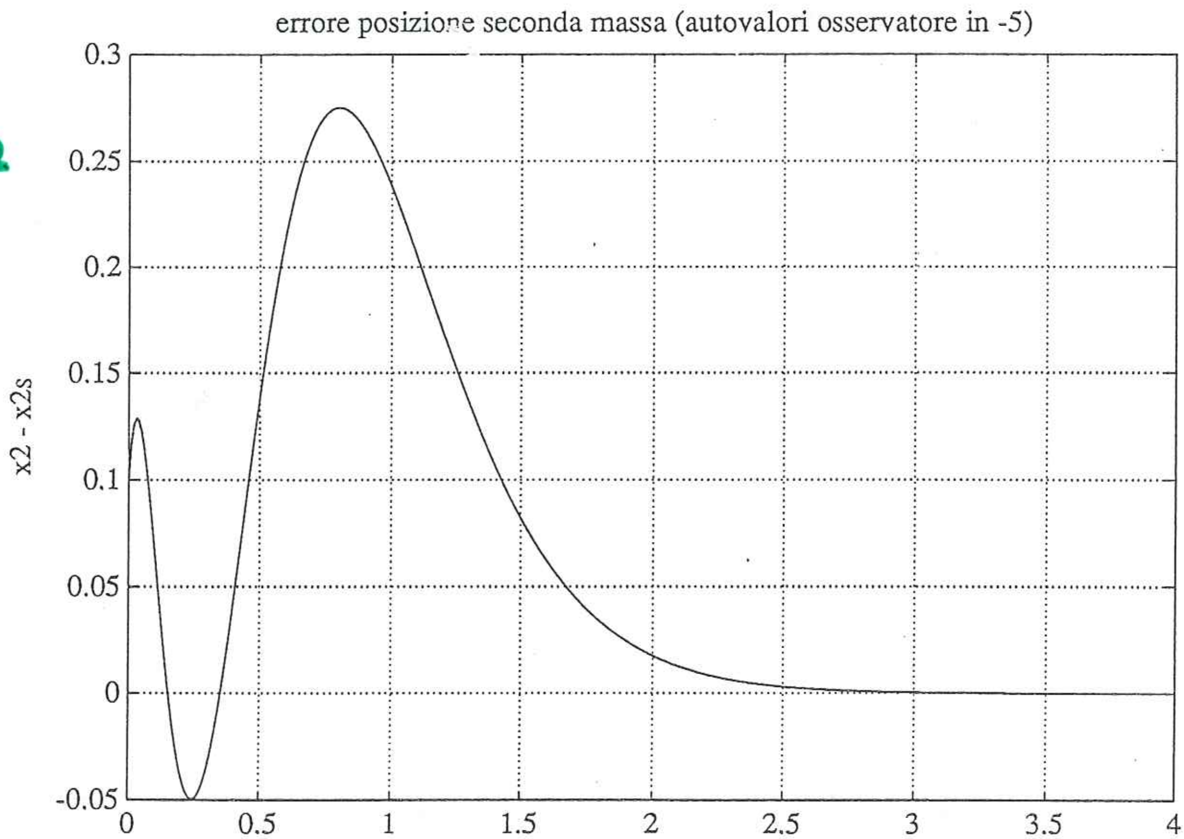
osservatore di Luenberger : $\lambda = -5$ coincidenti

$x_1 - \hat{x}_1$



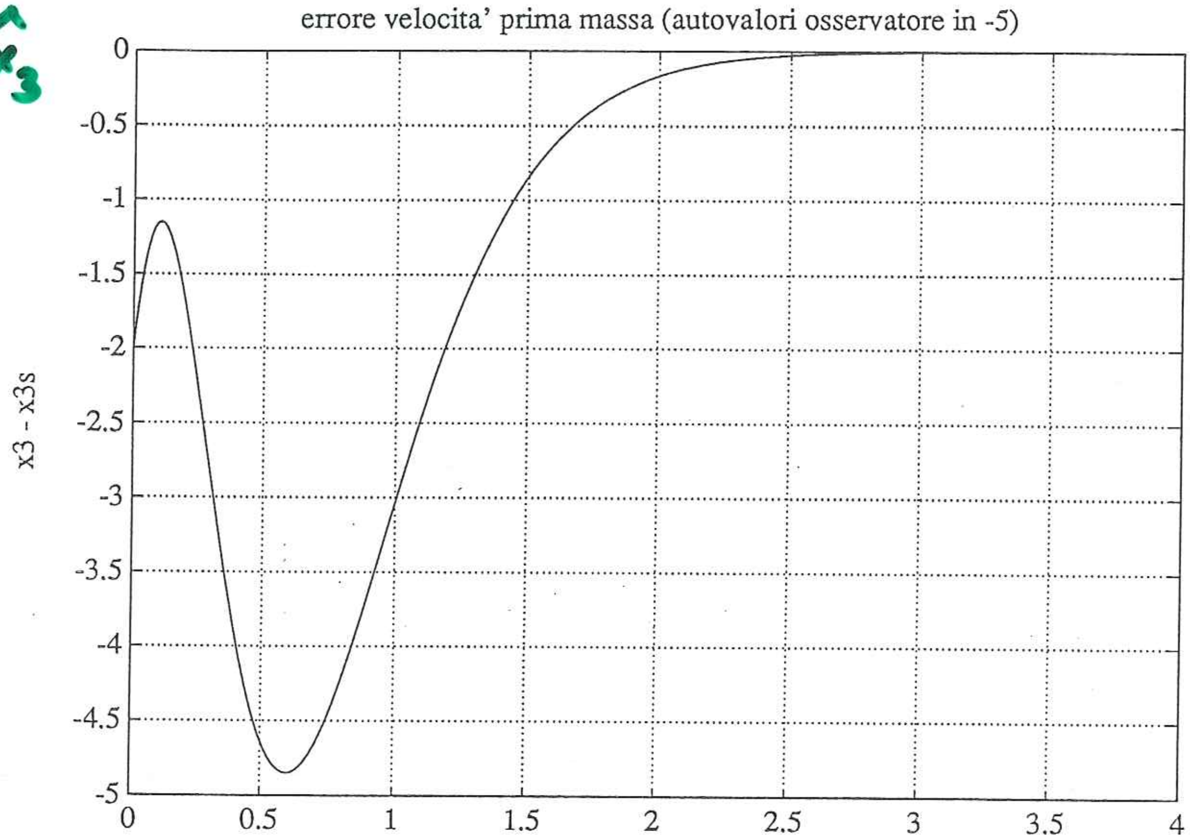
errori di stima posizione masse m_1 e m_2

$x_2 - \hat{x}_2$



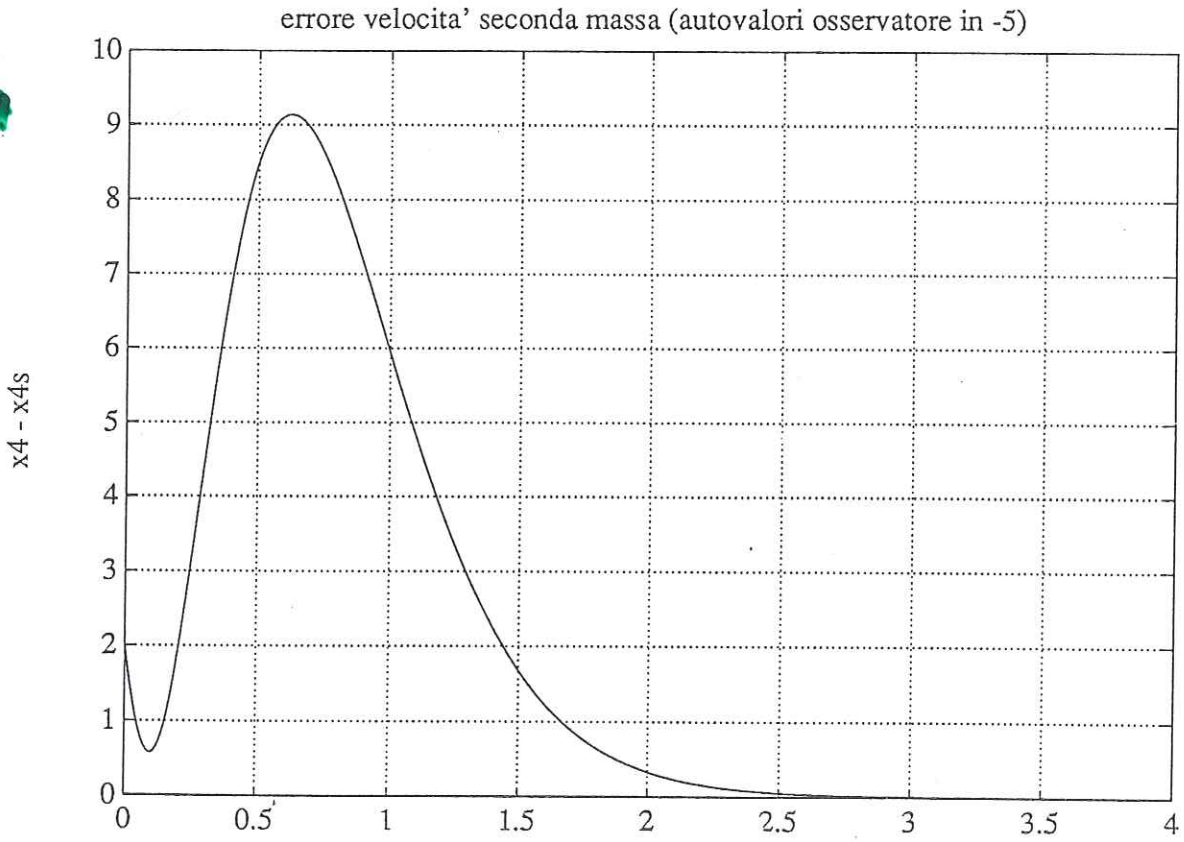
$\lambda = -5$

$x_3 - \hat{x}_3$



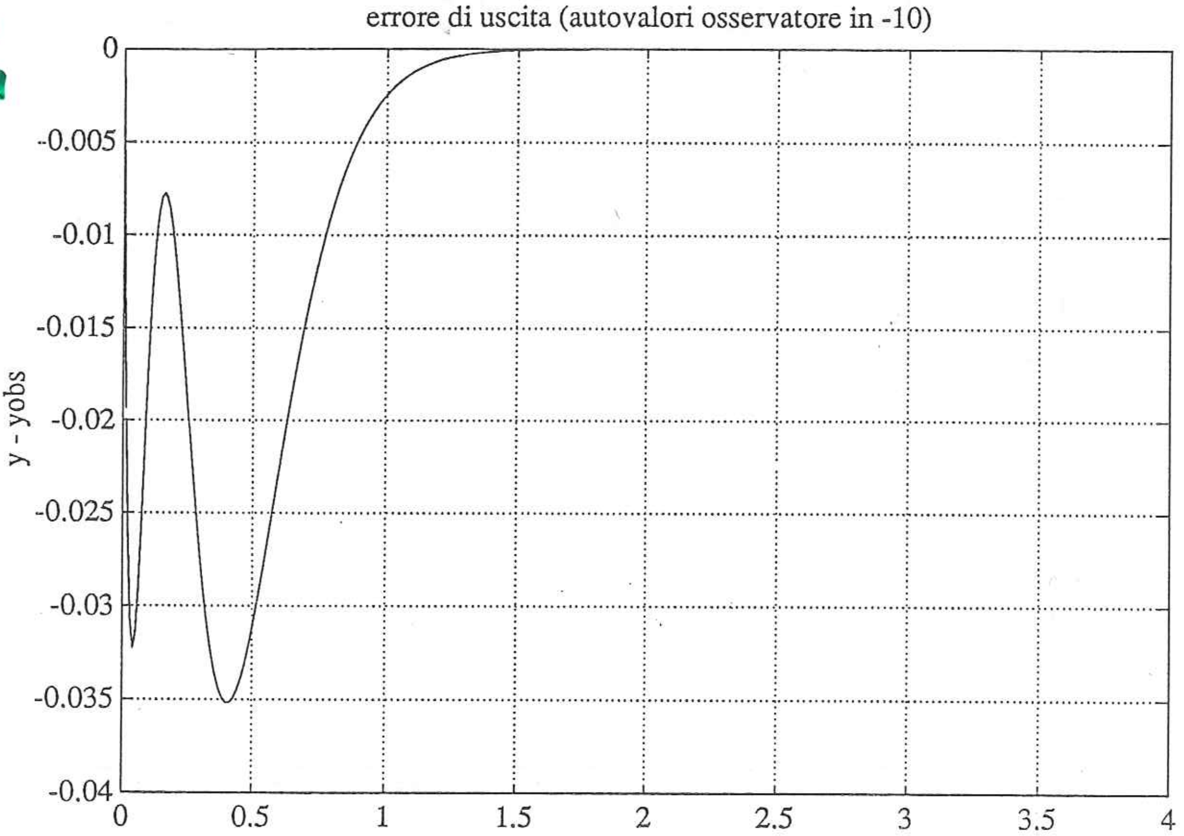
errori di stima velocità masse m_1 e m_2

$x_4 - \hat{x}_4$



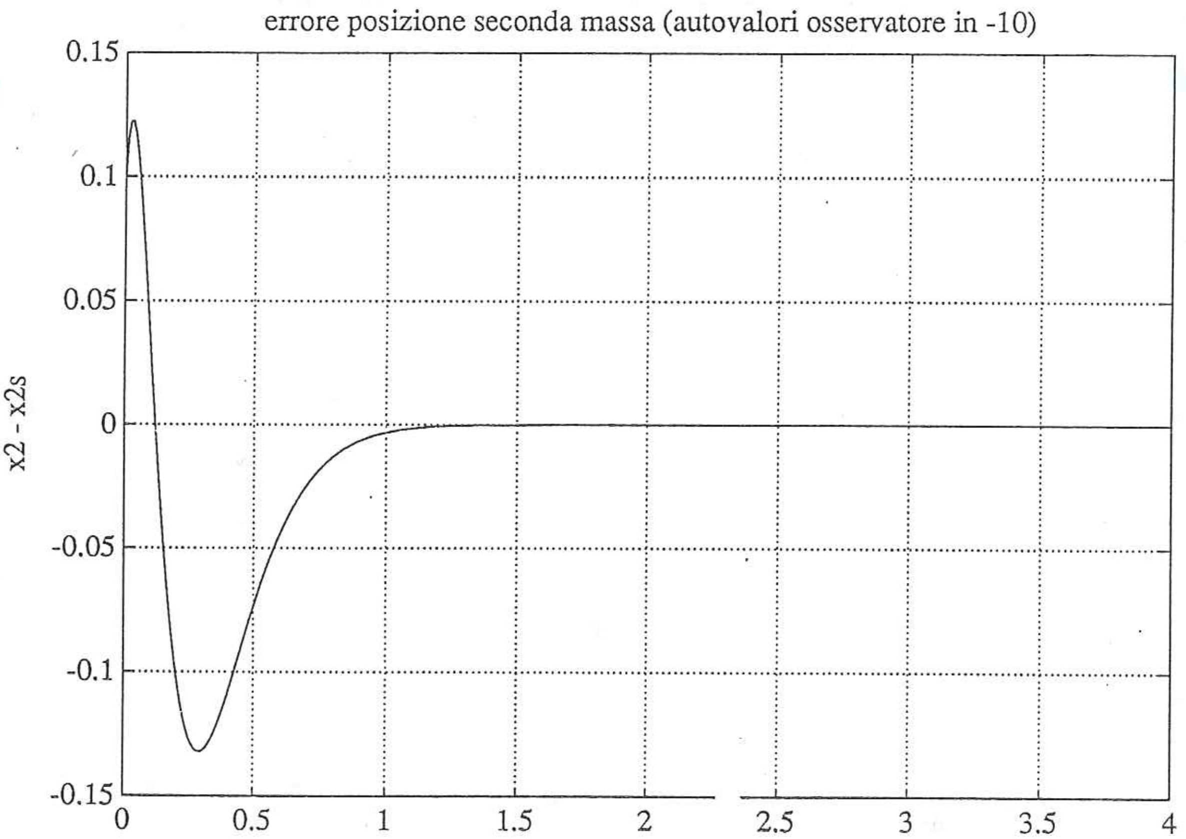
osservatore di Luenberger : $\lambda = -10$ coincidenti

$x_1 - \hat{x}_1$



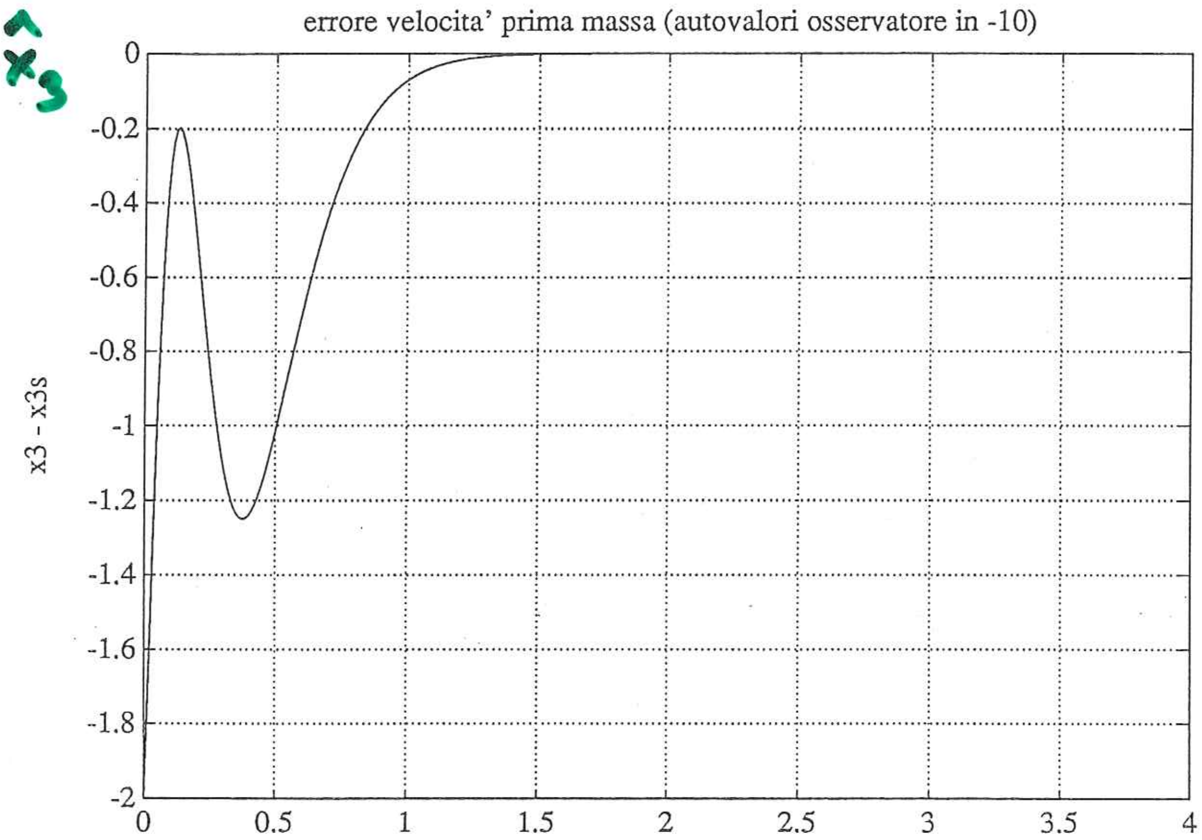
errori di stima posizione masse m_1 e m_2

$x_2 - \hat{x}_2$



$\lambda = -10$

$x_3 - \hat{x}_3$



errori di stima velocità masse m_1 e m_2

$x_4 - \hat{x}_4$